نظرية الطوابير

إعداد : سامح محمد

ماجستير إدارة أعمال

هذه المقالات تم نشرها في:

موقع الإدارة والهندسة الصناعية
https://samehar.wordpress.com

٢٠٢٢

المحتويات

نظرية الطوابير

قانون ليتل Little’s Law

افترض أنك مدير لمؤسسة خدمية وتريد أن تعرف تأثير تقليل زمن الخدمة على طول مدة الانتظار وعلى عدد المنتظرين، أو افترض أنك مدير عملية صناعية وتريد معرفة تأثير حجم المخزون نصف المصنع على زمن تحويل المادة الخام إلى منتج نهائي، كيف تدرس هذه المسألة؟ هناك طرق حسابية عديدة مثل نظرية الطوابير ولكن هناك قانونا بسيطا وعاما يساعدنا كثيرا في مثل هذه الحالات وهذا القانون هو قانون ليتل Little's Law وهو قانون شهير في الهندسة الصناعية.

ما هو قانون ليتل (لِتل)؟

وكلمة Little هنا لا تعني قليل بل هي نسبة لاسم العالم الذي توصل لهذا القانون وهو جون ليتل John Little. ينص قانون ليتل على أن عدد العملاء في المنظومة يساوي حاصل ضرب معدل وصول العملاء X الزمن الذي يستغرقه العميل في المنظومة. افترض أن:

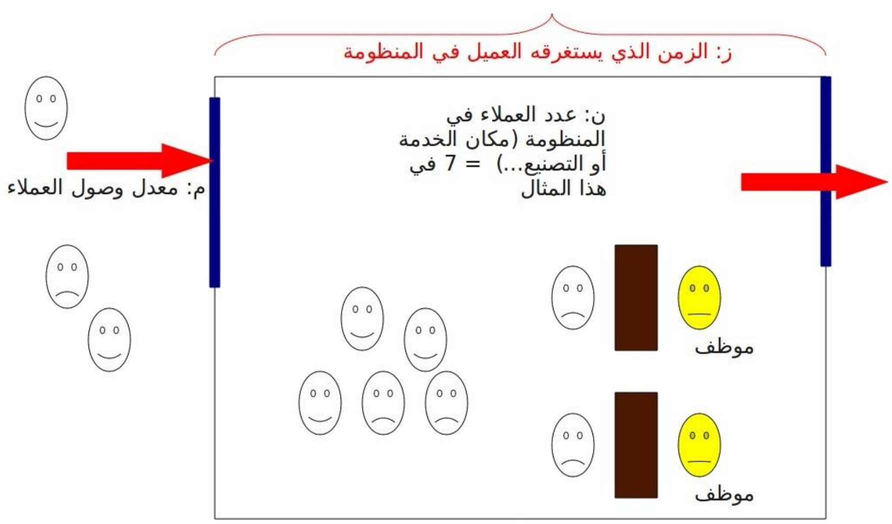
ن: عدد العملاء في المنظومة

م: معدل وصول العملاء

ز: الزمن الذي يستغرقه كل عميل في المنظومة

يمكن أن نكتب قانون ليتل الآن كلآتي:

ن = م X ز



قانون بسيط ولكنه مفيد جدا ومتعدد التطبيقات. ويتميز هذا القانون بأنه يصلح للتطبيق على أي عملية انتظار بغض النظر عن التوزيع الرياضي لزمن العملية (الخدمة) وبغض النظر عن التوزيع الرياضي لمعدل الحضور وبغض

النظر عن عدد مقدمي الخدمة (عدد الماكينات)، وهذا يجعله قانونا واسع التطبيق. والشرط الوحيد لتطبيقه هو أن تكون المنظومة في حالة استقرار أي أن المعدلات ثابتة.

مثال: نحن نقوم بتوزيع بعض المساعدات على المحتاجين وقد تابعنا معدل الحضور خلال ساعة كاملة فوجدناه ٣٠ عميلا أي أن معدل الحضور = ٦٠/٣٠= ٠,٥ عميل في الدقيقة، وقد وجدنا أن العميل يستغرق اثنا عشر دقيقة في المتوسط بين حضوره وانصرافه، كيف نحسب العدد المتوسط للمتواجدين في مكان تقديم الخدمة؟

نستخدم قانون ليتل ونحن نعلم ان م = ٠,٥ عميل في الدقيقة، وأن ز= ١٢ دقيقة

متوسط عدد العملاء داخل مقر الخدمة = ٠,٥ * ١٢ = ٦ عملاء

- - - - - - - - - - - -

مثال: افترض أنك تدير مطعما وتتوقع وصول ستين عميلا في ساعة الذروة، وعادة يمضي العميل ٤٥ دقيقة في المطعم، فما عدد المقاعد المطلوبة؟

معدل وصول العملاء = ٦٠ عميلا في الساعة أي عميل في الدقيقة، والزمن الذي يقضيه العميل هو ٤٥ دقيقة

عدد المقاعد (عدد العملاء في المطعم) = ١ * ٤٥ = ٤٥ مقعدا

- - - - - - - - - - - -

مثال: نحن مؤسسة تقوم بتلقي طلبات استخراج وثيقة ما عبر الإنترنت ثم ندرس الطلبات ونصدر الوثيقة ونرسلها للعميل. فإذا كان معدل وصول الطلبات هو ٥٠ طلبا في اليوم، وكان عدد الطلبات التي تنتظر الدراسة هي في المتوسط ٢٠٠ طلبا فما هو الزمن المتوقع قبل تلبية طلب العميل أي ما هي مدة انتظار العميل حتى يصله طلبه؟

مدة الانتظار = م / ن = ٢٠٠ / ٥٠ = ٤ أيام

ماذا لو لاحظنا أن معدل الطلب قد زاد إلى ٢٥٠ طلبا في اليوم؟ في هذه الحالة علينا أن نخبر العميل أن الزمن المتوقع للانتظار = ٢٥٠ / ٥٠ = ٥ أيام.

فقانون ليتل هنا يساعدنا على توقع مدة الانتظار وبالتالي نستطيع أن نعطي العميل معلومة -ولو تقريبية- لمدة الانتظار المعتادة لمثل هذا الطلب حسب معدل الطلب.

- - - - - - - - - - - -

تطبيقات متنوعة

هذا القانون يمكن كتابته بصور أخرى مثل:

عدد العملاء في الطابور = معدل وصول العملاء * الزمن المتوسط للخدمة

مثال: افترض أننا نقدم خدمة ومعدل حضور العملاء لطلب هذه الخدمة هو ٣ عملاء في الدقيقة، ولا نريد أن يزيد طول طابور الانتظار عن ٦ عملاء، فما هو زمن الخدمة المطلوب؟

زمن الخدمة (ز)= ن / م = ٦ / ٣ = ٢ دقيقة

علينا أن نعمل حتى يكون زمن الخدمة أقل من أو يساوي دقيقتان لكي لا يزيد طول الطابور عن ستة عملاء.

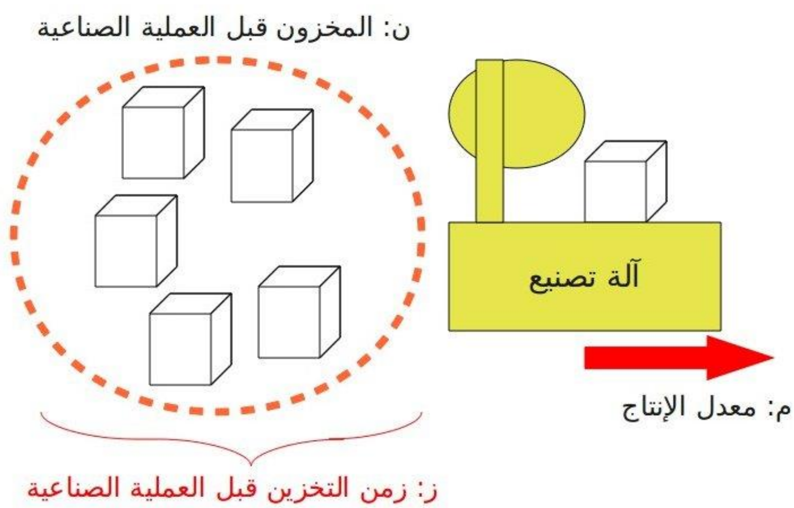
ماذا لو وصل معدل حضور العملاء في ساعة الذروة إلى ١٢ عميلا في الدقيقة وما زلنا لا نريد أن يزيد طول الطابور عن ٦ عملاء؟

علينا أن نقلل زمن الخدمة حتى يساوي = ٦ / ١٢ = ٠,٥ دقيقة، ولهذا فقد نضطر لزيادة عدد مقدمي الخدمة إلى أربعة أضعاف

- - - - - - - - - - - - -

وقد يستخدم قانون ليتل في العمليات الصناعية فيكتب كالتالي:

المخزون قبل أي عملية تصنيعية = معدل الإنتاج (وحدة/زمن) * زمن التخزين فبل العملية التصنيعية



مثال: افترض أن معدل إنتاج عملية تصنيعية هو ٢٠ وحدة في الساعة وأن المخزون المتوسط قبل هذه المرحلة هو ٦٠ وحدة، فما هو الزمن المتوسط لتخزين القطعة قبل هذه المرحلة؟المخزون قبل أي عملية تصنيعية = معدل الإنتاج (وحدة/زمن) * زمن التخزين فبل العملية التصنيعية

٦٠ = ٢٠ * زمن التخزين فبل العملية التصنيعية

زمن التخزين قبل هذه العملية = ٦٠ / ٢٠ = ٣ دقائق

ماذا لو كان المخزون نصف المصنع قبل هذه المرحلة هو ٦٠٠ قطعة. في هذه الحالة سيكون زمن التخزين (الانتظار قبل التصنيع) هو ٦٠٠ / ٢٠ = ٣٠ دقيقة. هذه نتيجة مهمة فهي تبين لنا أن زيادة المخزون نصف المصنع يعني طول مدة الانتظار قبل التشغيل وكلما أطلت هذا الزمن قبل كل مرحلة فإن الزمن الكلي لتحويل المادة الخام لمنتج نهائي يزيد كثيرا، لذلك فإن تقليل المخزون نصف المصنع هو وسيلة لتسريع عملية التصنيع. فعندما يطلب عميلا منتجا فإننا نحاول تلبية طلبه بسرعة وهذا يعني أننا لا نريد للمنتجات نصف المصنعة أن تنتظر فترات طويلة قبل كل مرحلة تصنيع.

وهناك ملاحظة أخرى حول هذا المثال. إن الإنتاجية القصوى لعملية ما هو رقم ثابت للعملية وبالتالي فإن زيادة المخزون نصف المصنع عن ما نحتاجه لتحقيق الإنتاجية القصوى لن يؤدي سوى لزيادة زمن التخزين وكمية المخزون وهو ما لا نريده. فمثلا لو كانت الطاقة الإنتاجية القصوى للماكينة هي ٥٠٠ قطعة في اليوم فإن تخزين ١٠٠٠ قطعة قبل تلك الماكينة لن يؤدي لزيادة طاقتها ولكنه يعني طول مدة التخزين وتعاظم كميته يوما بعد آخر.

قانون ليتل هو قانون بسيط ولكنه يساعدنا على ربط مؤشرات الانتظار وحساب مدة الانتظار أو عدد المنتظرين.

من مراجع الموضوع:

[Little's Law]

An Introduction to Management Science, Anderson et al., South Western, Ninth Edition, 2000

Service Management, Fitzsimmons and Fitzsimmons, Irwin Mc GrawHill, Third Edition, 2001

Factory Physics, Hopp and Spearman, Irwin, 1996

١- نظرية الطوابير Queueing Theory

الطوابير هي جزء أساسي من كل خدمة أو كل عملية تصنيع، ففي المؤسسة الخدمية ينتظر العملاء ريثما يحين دورهم، وفي المصنع تنتظر المواد الخام أو المنتجات نصف المصنعة ريثما يأتي دورها. والطوابيرقد تكون طوابير حقيقية في مركز الخدمة أوالمصنع، وقد تكون طوابير تليفونية عند الاتصال بخدمة العملاء، وقد تكون طوابير إلكترونية عند انتظار رد إلكتروني. ومن أولويات إدارة المؤسسة أن تحافظ على قصر الطابور وقصر وقت الانتظار، ولكي تقوم بذلك فلابد من وسيلة لتوقع طول الطابور وطول وقت الانتظار. هناك وسيلة حسابية هي نظرية الطوابير.

نظرية الطوابير Queueing Theory هي مجموعة من المعادلات التي تربط طول الطابور وطول وقت الانتظار بمعدل وصول العملاء ومتوسط وقت الخدمة. ولذلك فهذه النظرية هي إحدى أدوات مدير الخدمة مثل المستشفى أو مكتب استخراج شهادات أو السوق التجاري أو مركز تنظيف السيارات وغيرها. كما تستخدم النظرية في الصناعة لتقدير أوقات انتظار الخامات وعدد القطع المنتظرة. ولكن استخدام نظرية الطوابير في الخدمة أكثر أهمية وأكثر شيوعا منه في الصناعة ولذلك فقد تلاحظ أن مناقشتنا هنا ستركز على الخدمات أكثر من التصنيع.

ومن الجدير بالتوضيح أن قدرة المؤسسة على خدمة ألف عميل في اليوم لا يعني انه لن تكون هنا طوابير إذا طلب الخدمة ١٠٠٠ عميل أو أقل، فالطابور ينشأ من حضور العملاء بكثافة في وقت ما وحضور عدد قليل في وقت آخر، وينشأ من طول وقت خدمة عميل عن عميل آخر، أي أن التغير في معدل وصول العملاء وزمن الخدمة هو سبب تكون الطوابير وحدوث الانتظار. ولذلك فلا يمكننا حساب طول الطابور وطول وقت الانتظار اعتمادا على متوسط زمن الخدمة ومتوسط معدل طلب الخدمة بل لابد من أن نأخذ في الاعتبار تغير معدل الحضور وتغير زمن الخدمة وهذا هو ما تقدمه لنا نظرية الطوابير.

نظرية الطوابير هي نظرية عظيمة الفائدة لكل مدير في مؤسسة خدمية أو مدير لعملية تصنيع، فهي متعددة التطبيقات بدءا من المخبز ومرورا بالخدمات الحكومية وانتهاء بالمطارات.

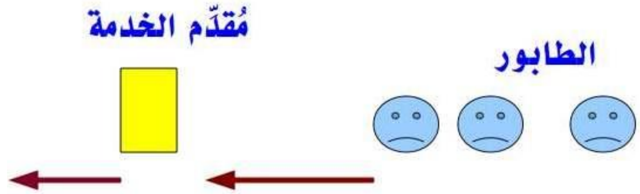
خصائص الطوابير

قبل استعراض تفاصيل نظرية الطوابير لابد أن نتعرف على خصائص الطوابير والتي قد ينتج عنها حالات متنوعة لها حسابات مختلفة في نظرية الطوابير.

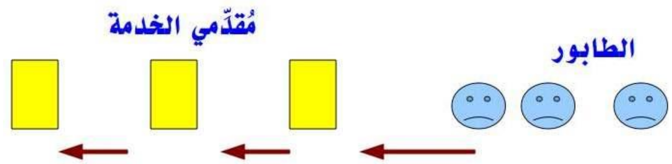
عدد المراحل وعدد قنوات الخدمة

قد تتكون الخدمة من مرحلة واحدة يقوم بها شخص واحد أو ماكينة واحدة، وقد يقدم الخدمة أكثر من شخص أو أكثر من ماكينة، وقد تتكون الخدمة من عدة خطوات يمر بها العميل واحدة تلو الأخرى وقد يقدم الخدمة في كل مرحلة موظف واحد أو عدد من الموظفين. ولذلك فإن هناك أنواعا للطوابير بناء على عدد قنوات الخدمة وعدد مراحل الخدمة كما يلي:

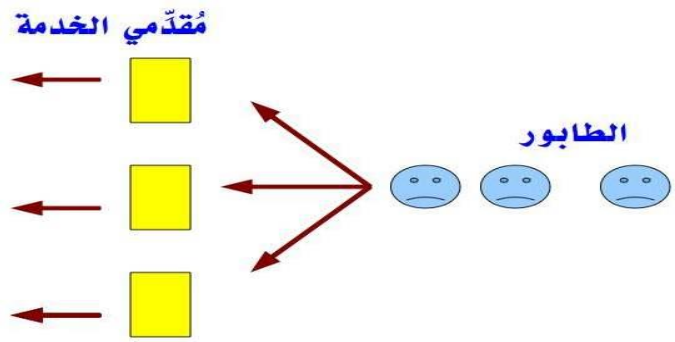
١- قناة واحدة - مرحلة واحدة: في هذه الحالة فإن العميل أو الشيء الذي ستتم عليه الخدمة أو العملية سيقف في طابور واحد ويمر بعملية أو مرحلة واحدة فقط، مثل طابور ماكينة الصراف الآلي أو طابور العملاء الذين يتنظرون خدمة من نفس الموظف.



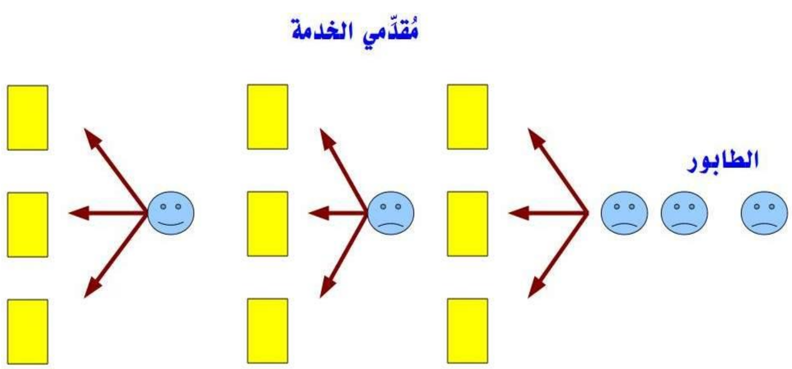
٢- قناة واحدة - مراحل متعددة: في هذه الحالة يمر العميل أو الشيء الذي ستتم عليه العملية من مرحلة لأخرى حتى يحصل على الخدمة المطلوبة، مثال ذلك أن تكون المرحلة الأولى هي مرحلة التأكد من صحة البيانات والثانية هي مرحلة استخراج وثيقة ما والثالثة هي مرحلة التوثيق، أو أن تكون عملية صناعية فتكون الأولى هي مرحلة التقطيع والثانية هي مرحلة الدهان والثالثة هي مرحلة الفحص وهكذا.



٣- قنوات متعددة - مرحلة واحدة: في هذه الحالة تتكون الخدمة من مرحلة واحدة ولكن يوجد أكثر من مقدم للخدمة، مثال ذلك طابور البنك الذي ينتهي إلى أكثر من موظف، أو طابور الخامات التي تنتظر التشغيل في ماكينة أ أو ب أو ج.



٤- قنوات متعددة - مراحل متعددة: هذه الحالة هي شبيهة بالحالة السابقة ولكنها متعددة المراحل، أي أن كلمرحلة تتكون من أكثر من مقدم للخدمة.



مصدر طالبي الخدمة:

إن مصدر طالبي الخدمة يختلف من حالة لأخرى، ففي بعض الحالات يكون هناك مصدر طالبي الخدمة غير محدود (أي كبير جدا) infinite، وفي حالات أخرى يكون مصدر طالبي الخدمة محدودا finite. فالبنك والمستشفى والسوق التجاري يتعامل مع عدد غير محدود من طالبي الخدمة لأن الخدمة غير قاصرة على بضعة أفراد بل يمكن لأي فرد أن يقرر الذهاب إلى السوق التجاري في أي وقت، ولكن الموظف المسئول عن صيانة عدد محدد من الماكينات في المصنع فإنه يتعامل مع عدد محدود من طالبي الخدمة ، وكذلك الممرضة التي تتابع عدد محدد من المرضى وهكذا.

طول الطابور

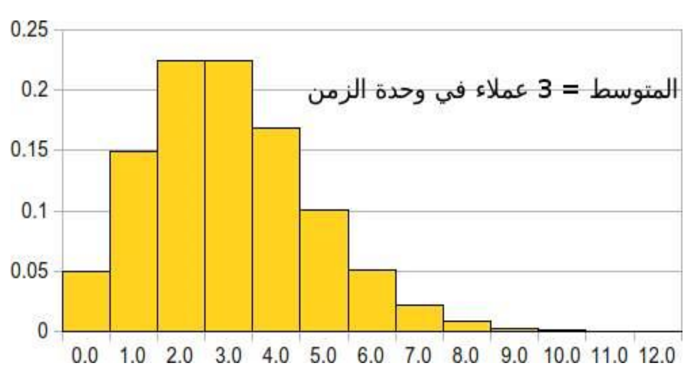
أحيانا يكون طول الطابور محدودا بمساحة أو عدد مقاعد وكثيرا ما يكون الطول غير محدود فالطابور قد يمتد عبر الطريق المجاور أو عبر السلالم. لاحظ أن طول الطابور يختلف عن مصدر طالبي الخدمة، فالأخير يتعلق بكل من بإمكانهم الذهاب لطلب الخدمة، بينما الأول يتعلق بالمنتظرين داخل مكان تقديم الخدمة في نفس الوقت.

نظام الطابور

نظام الطابور يعني طريقة ترتيب العملاء أو النظام الذي بمقتضاه يحصل هذا على الخدمة قبل ذاك. هناك أنظمة متعددة وأكثرها شيوعا هو الخدمة بأسبقية الحضور First Come First Served بمعنى أن من يأتي أولا يحصل على الخدمة أولا. ولكن هناك أنظمة أخرى مثل تحديد أولويات الحصول على الخدمة حسب خاصية معينة مثل خطورة الحالة في طوارئ المستشفى أو نوع الخدمة المطلوبة: سريعة أم عادية. ولكل نظام تطبيقاته ولكن نظام الخدمة بأسبقية الوصول هو الأكثر استخداما في نظرية الطوابير.

التوزيع الاحتمالي لوصول العملاء

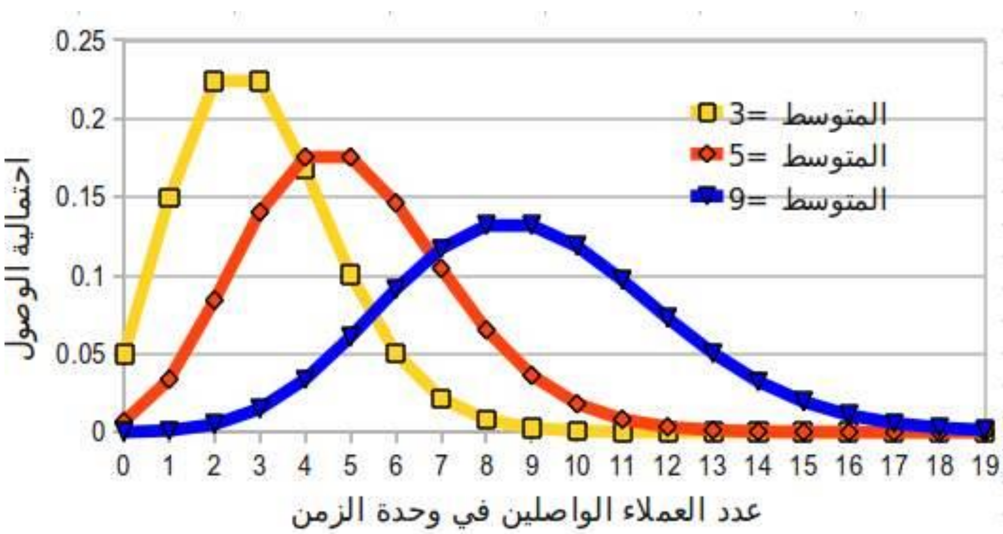
معدل وصول العملاء يعني العدد المتوسط للعملاء الذين يصلون في وحدة الزمن، فعندما يصل ١٠٠ عميل في أربع ساعات فإن معدل وصول العملاء يساوي ١٠٠ / ٤ = ٢٥ عميل في الساعة، هذا لا يعني أن كل ساعة سيحضر ٢٥ عميلا ولكن قد يحضر ثلاثون في الساعة الأولى وعشرون في الثانية، فهذا هو العدد المتوسط في الساعة.



عادة ما يصل العملاء بشكل عشوائي (أي غير منظم) وبشكل مستقل أي أن وصول هذا العميل لا يرتبط بحضور غيره، وقد وجد الباحثون أن معدل وصول العملاء لطلب الخدمة يخضع عادة لتوزيع احتمالي يسمى بوسون

Poisson Probability Distribution. ويمكن للقارئ الكريم الرجوع لمقالة المدرج التكراري ومقالة عن بعض التوزيعات الاحتمالية لمزيد من التفصيل حول التوزيعات الاحتمالية. ويمكننا فهم توزيع وصول العملاء على أنه معادلة تحدد احتمالية وصول عدد من العملاء في وقت محدد، فإذا كان معدل وصول العملاء هو ٢٥ عميل في الساعة فما هي احتمالية وصول ١٥ عميلا في الساعة أو ٥٠ عميلا في الساعة؟ هذا ما يحدده التوزيع الاحتمالي. الشكل أعلاه يبين توزيع بوسون لمتوسط ٣ عملاء في وحدة الزمن (الدقيقة على سبيل المثال)، يمكن ملاحظة ان التوزيع يبين احتمالية حضور ٨ عملاء في الدقيقة ولكن هذا قليل الحدوث،وهناك احتمالية لحضور عميل واحد في الدقيقة أو أربعة أو ستة وهكذا، ولكل حالة نسبة حدوثها حسب الرقم المبين على المحور الرأسي.

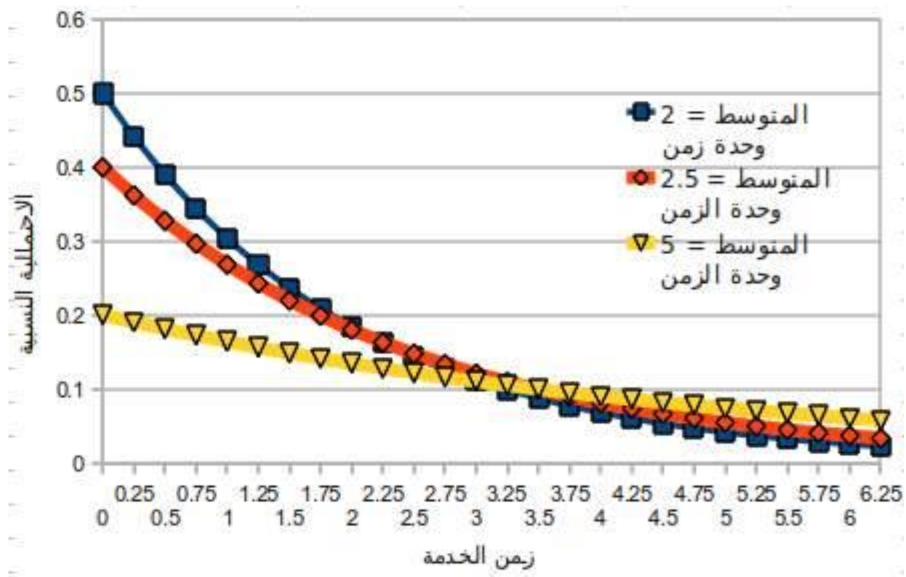
أما الشكل أدناه فيبين اختلاف توزيع بوسون حسب اختلاف معدل الحضور من ٣ إلى ٥ إلى ٩.



التوزريع الاحتمالي لزمن الخدمة

أما زمن الخدمة فإن نظرية الطوابير تفترض أنه يخضع للتوزيع الأسي Exponential Distribution وهو ما ينطبق على الكثير من الخدمات، ولكن من المهم أن نتأكد قبل استخدام نظرية الطوابير من أن زمن الخدمة الفعلي يتبع التوزيع الأسي فعلا وإلا فإن علينا اللجوء لأساليب أخرى مثل المحاكاة بالحاسوب أو بعض الحلات الخاصة من نظرية الطوابير.

ولو تأملنا الشكل أدناه للاحظنا أنه من المقبول أن يشابه هذا المنحنى زمن الخدمة الحقيقي، فالمنحنى يتميز بوجود احتمالية كبيرة لأن يكون زمن الخدمة أقل من المتوسط، وهناك احتمال لزيادة الزمن عن المتوسط ولو بزيادات كبيرة في أحيان قليلة جدا. وفي الواقع فإن الخدمة التي تتم عادة في دقيقتين قد تستغرق دقيقة ونصف في أحيان عديدة وقد تستغرق ٥ دقائق في أحوال قليلة وقد تستغرق سبع دقائق في أحوال نادرة.



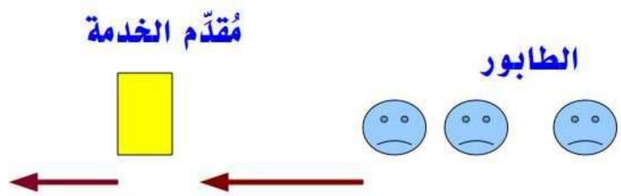
هذه هي خصائص الطوابير والتي سنستخدمها بمشيئة الله تعالى في المقالات التالية لمناقشة الحالات المختلفة لنظرية الطوابير.

نظرية الطوابير -٢ Queueing Theory

بعد أن استعرضنا في المقالة السابقة الخصائص المختلفة للطوابير، نبدأ في هذه المقالة في تحليل الحالات المختلفة للطوابير فنتعرف على كيفية حساب طول الطابور وزمن الانتظار، ونناقش بعض الأمثلة التطبيقية على هذه الحالات.

١- قناة واحدة للخدمة - مرحلة واحدة - زمن خدمة يتبع التوزيع الأسي:

هذه هي أبسط الحالات، طابور واحد ينتهي بمقدم الخدمة الذي يقدم الخدمة كاملة أي أنه لا توجد مرحلة أخرى. هذه الحالة شائعة جدا سواء في البنوك أو الأسواق المزدحمة أو جهات استخراج مستندات رسمية. نفترض في هذه الحالة نفترض أن وصول العملاء في وحدة الزمن (ثانية او دقيقة أو ساعة..) يتبع توزيع بوسون، كما نفترض أن زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي، كما نفترض أن الخدمة بأسبقية الوصول، وأخيرا نفترض أن مصدر طالبي الخدمة لا نهائي وأن طول الطابور غير محدود.



نستخدم في نظرية الطوابير Queueing Theory مجموعة من الرموز في المعادلات وهي مبينة في الشكل أدناه، وهذه الرموز هي من اختياري لأنني لم أجد رموزا شائعة عن هذا الموضوع باللغة العربية، وقد وضعتُ الرمز الإنجليزي المعتاد على يسار كل سطر.

ص:	معدل الوصول	λ
خ:	معدل الخدمة	μ
ح$_0$:	احتمالية ألا يكون هناك أحد في منظومة الخدمة	P_0
ح$_ن$:	احتمالية أن يكون هناك عدد ن في منظومة الخدمة	P_n
ط$_ك$:	العدد المتوسط للعملاء في منظومة الخدمة	L
ط$_ط$:	العدد المتوسط للعملاء في الطابور	L_q
و$_ك$:	متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في منظومة الخدمة	W
و$_ط$:	متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في الطابور	W_q
غ:	نسبة انشغال مقدم الخدمة	ρ

عند دراسة أي عملية انتظار فلابد أن نعرف معلومتين هما: معدل الوصول (ص) ومعدل الخدمة (خ)، معدل الوصول قد يكون ٣٠ عميلا في الساعة، ومعدل الخدمة قد يكون ٤٥ عميلا في الساعة. يمكننا لأي حالة حقيقية أن نحسب عدد العملاء الذين يحضرون في يوم كامل وبالتالي يمكننا حساب العدد المتوسط للعملاء الذين يحضرون في الساعة، كما يمكننا حساب الزمن المتوسط للخدمة وذلك بحساب زمن الخدمة لمجموعة كبيرة من العملاء ثم

قسمة الرقم على عدد هؤلاء العملاء. معدل الخدمة = (١÷ زمن الخدمة)، فإذا كان زمن الخدمة المتوسط هو ٣ دقائق فإن معدل الخدمة هو ٣/١ عميل كل دقيقية أو ٢٠ عميل كل ساعة. لاحظ أن زمن الخدمة يُقصَد به زمن الخدمة الذي لا يشمل أي انتظار أي الزمن الذي يقضيه العميل أثناء عملية الخدمة ذاتها.

قد نحتاج أن نحسب احتمالية وجود عدد ما من العملاء في منظومة الخدمة ولذلك نستخدم الرمز $\text{ح}_{\text{ن}}$ للدلالة على احتمالية وجود عدد ن من العملاء في منظومة الخدمة. ويقصد بمنظومة الخدمة طابور الانتظار وعملية الخدمة نفسها.

تمكننا نظرية الطوابير من حساب عدد العملاء المتوسط في الطابور $\text{ط}_{\text{ط}}$ والعدد المتوسط الكلي للعملاء في منظومة الخدمة $\text{ط}_{\text{ك}}$. كما تمكننا من حساب متوسط وقت الخدمة الكلي $\text{و}_{\text{ك}}$ ومتوسط وقت الانتظار أو وقت الطابور $\text{و}_{\text{ط}}$. وأخيرا يمكننا حساب نسبة انشغال مقدم الخدمة غ أي نسبة الوقت الذي يكون مشغولا فيه إلى وقت العمل الكلي.

وهذه هي المعادلات الخاصة بحالتنا:

$$\text{ح}_0 = 1 - \frac{\text{ص}}{\text{خ}}$$

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \left[\frac{\text{ص}}{\text{خ}}\right]^{\text{ن}} * \text{ح}_0$$

$$\text{ط}_{\text{ك}} = \frac{\text{ص}}{\text{خ} - \text{ص}}$$

$$\text{ط}_{\text{ط}} = \frac{\text{ص}^2}{\text{خ} * (\text{خ} - \text{ص})}$$

$$\text{و}_{\text{ك}} = \frac{1}{\text{خ} - \text{ص}}$$

$$\text{و}_{\text{ط}} = \frac{\text{ص}}{\text{خ} * (\text{خ} - \text{ص})}$$

$$\text{غ} = \frac{\text{ص}}{\text{خ}}$$

هذه المعادلات لها استنتاجات طويلة لن نخوض فيها هنا، ولكننا سنحاول كمهندسين صناعيين أو مديرين أن نستفيد منها. ماذا تلاحظ في المعادلات؟ إنها تبدو بسيطة وهي كلها تعتمد على المتغيرين ص وخ. دعنا نرى مثالا.

مثال: افترض أن مركزا يقدم خدمة توثيق الشهادات العلمية، ويستغرق توثيق الشهادة في المتوسط خمس دقائق (تخضع للتوزيع الأسي)، ويصل لهذا المركز في المتوسط ٩ عملاء في الساعة (تخضع لتوزيع بوسون). ما هو

متوسط عدد العملاء داخل مركز الخدمة، وما هو وقت الانتظار، وما هي احتمالية عدم وجود أي عميل داخل مركز الخدمة؟

ص = ٩ عميل/ساعة

خ= ١/٥ عميل/دقيقة = ٦٠/٥ = ١٢ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ١- (٩÷١٢)= ٠,٢٥ =٢٥%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٩÷(١٢-٩) = ٩÷٣ = ٣ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور= ٩*٩ ÷ (١٢ *(١٢-٩))= ٨١ ÷ ٣٦ = ٢,٢٥ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ١ ÷ (١٢ - ٩)= ١/٣= ٠,٣٣ ساعة = ٢٠ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٩ ÷(١٢ *(١٢-٩))= ٩/٣٦ = ٠,٢٥ ساعة = ١٥ دقيقة

احتمالية انشغال مقدم الخدمة = ٩ ÷ ١٢ = ٠,٧٥ =٧٥%

نظرية الطوابير ليست مجرد عملية حسابية ولكنها مرتبطة ارتباطا وثيقا بالقرارات الإدارية، فنحن وجدنا أن متوسط طول الطابور هو ٢,٢٥ عميل وربما كان ذلك مقبولا، ولكن وقت الانتظار هو ١٥ دقيقة قد لا تقبله إدارة المؤسسة. ماذا نفعل لنقلل زمن الانتظار؟ إما أن نزيد عدد مقدمي الخدمة إلى اثنين وهذا يقودنا لحالة أخرى من حالات نظرية الطوابير، أو نحاول تقليل زمن الخدمة نفسها عن طريق تحليل أسلوب تقديم الخدمة ومحاولة تقليل زمن كل خطوة. افترض أننا استطعنا الوصول لزمن خدمة يساوي ٤,٥ دقيقة بدلا من ٥ دقائق، ما هو تأثير ذلك على وقت الانتظار؟

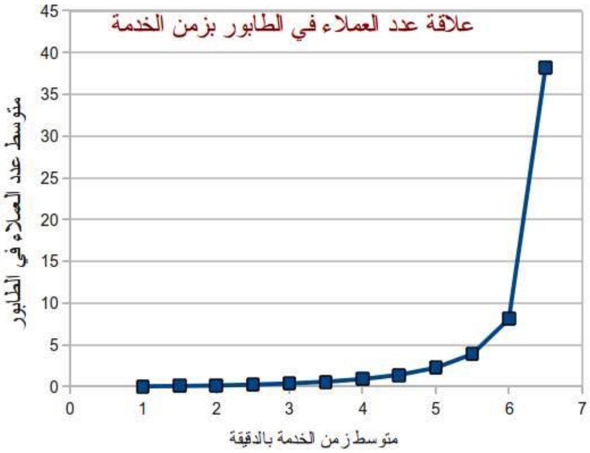
ص = ٩ عميل/ساعة

خ= ١/٤,٥ عميل/دقيقة = ٦٠/٤,٥ = ١٣,٣ عميل في الساعة

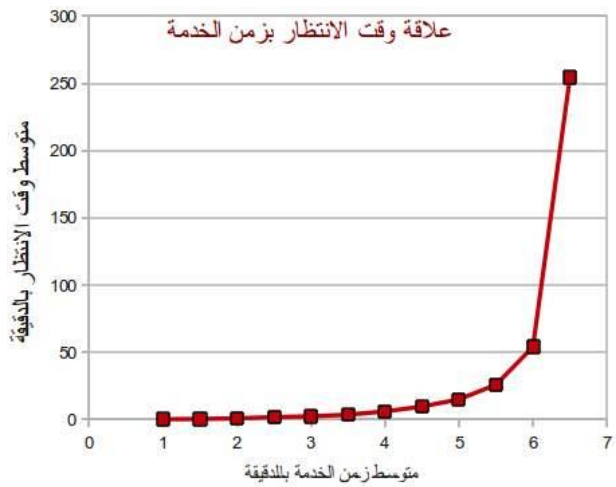
متوسط وقت الانتظار = ٩ ÷(١٣,٣ *(١٣,٣-٩))= ٩/٥٧,٣= ٠,١٦ ساعة = ٩,٤ دقيقة

لقد انخفض وقت الانتظار من ١٥ دقيقة إلى ٩,٤ دقيقة لمجرد تقليل زمن الخدمة بمقدار نصف دقيقة، أو لقد انخفض وقت الانتظار بمقدار ٣٠% لمجرد تقليل زمن الخدمة بمقدار ١٠% فقط. هذا يبين لنا أمرا مهما وهو أن تقليل زمن الخدمة بمقدار بسيط يؤدي إلى تقصير وقت الانتظار بمقدار كبير. وهذا يوضح الأهمية الكبيرة لتدريب الموظفين مقدمي الخدمة لأن مجرد زيادة بسيطة في زمن الخدمة تؤدي لزيادة كبيرة في وقت الانتظار. وهذا يفسر لك ما الذي يحدث في السوق التجاري عند وجود أكثر من موظف يقوم بحساب واستلام ثمن المشتروات، فعندما يكون أحدهما قليل الخبرة تجد ان الطابور الذي أمامه يسير ببطء شديد على الرغم من أن الموظف لا يبدو بطيئا بنفس القدر.

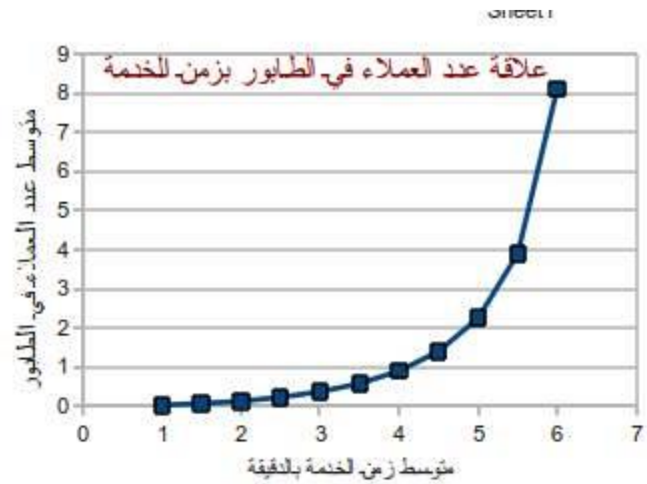
دعنا نستخدم هذه المعادلات لكي نرسم العلاقة بين زمن الخدمة وطول الطابور وزمن الانتظار على اعتبار ثبات معدل الوصول عند ٩ عملاء في الساعة.

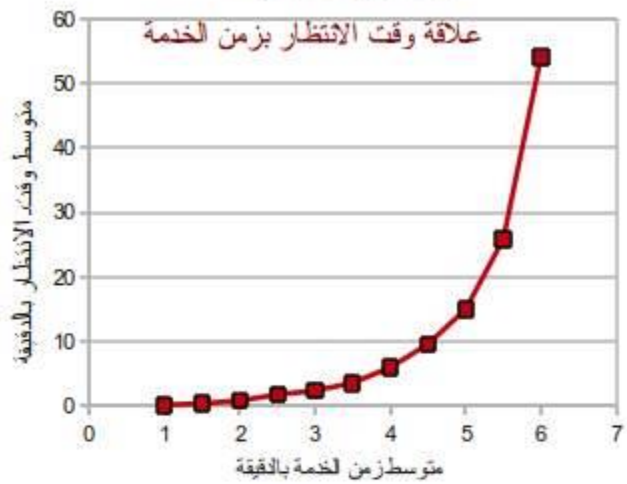


الرسم أعلاه يبين لنا أن طول الطابور يزداد مع زيادة زمن الخدمة، ولكن هذه الزيادة تكون كبيرة جدا عند زيادة زمن الخدمة من ٦,٠ إلى ٦,٥ دقيقة حيث يزداد طول الطابور من ٨ إلى ٣٨ عميلا أي حوالي خمسة أضعاف. هذا يبين أن تغييرا طفيفا في زمن الخدمة وقت الازدحام يكون له تأثير كبير. والعلاقة بين زمن الانتظار وزمن الخدمة لا تختلف عن سابقتها كما بالشكل أدناه.



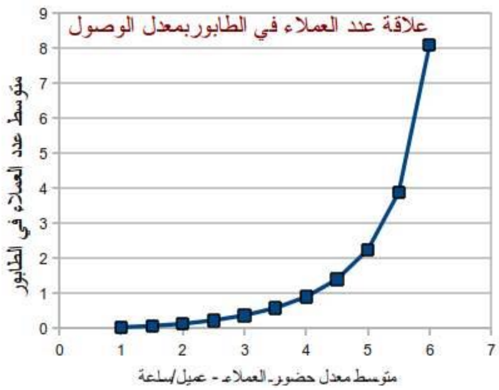
والآن دعنا نستبعد النقطة الخاصة بزمن الخدمة ٦,٥ دقيقة لكي نرى تفاصيل باقي المنحنى. يمكننا أن نستخدم المنحنى لحساب زمن الخدمة المطلوب تحقيقه لكي يكون زمن الانتظار أقل من قيمة محددة ترتضيها إدارة المؤسسة، فإذا أردنا أن يكون زمن الانتظار أقل من ٦ دقائق فلابد أن يكون زمن الخدمة أقل من ٤ دقائق، وإذا أردنا ألا يزيد عدد المنتظرين عن واحد فقط فلابد أن يكون زمن الخدمة أقل من ٤ دقائق وهكذا.

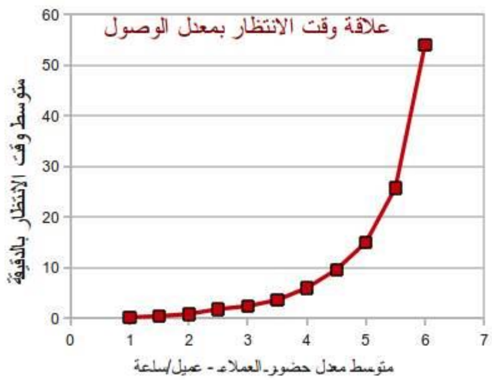




ولكن ألا يمكننا تغيير معدل الوصول؟ من المعتاد أن يكون الرد نعم لا يمكننا، ولكن في الحقيقة يمكننا التأثير على معدل الوصول. إذا كان بإمكاننا خدمة بعض العملاء تليفونيا أو عن طريق الإنترنت فإن عددا من العملاء لن يأتي لمقر الخدمة وبالتالي سيقل عدد العملاء الكلي الذي يأتي لمقر الخدمة أي أننا سنقلل معدل الوصول. وإذا كنا ندرس فترة الازدحام اليومية أو الموسمية فإنه يمكننا التأثير على العملاء للحضور في فترة عدم الازدحام أو قبل بداية الموسم وذلك بتقديم تخفيضات. ويمكننا تقليل معدل الوصول كذلك بزيادة ساعات العمل من ١٢ إلى ١٣ ساعة على سبيل المثال، فيتم توزيع نفس عدد العملاء على ١٣ ساعة بدلا من ١٢ فيقل معدل الوصول في الساعة.

يمكننا استخدام نفس المعادلات لرسم العلاقة بين معدل الوصول وطول الطابور وزمن الانتظار على اعتبار ثبات زمن الخدمة عند ٥ دقائق، كما بالشكل أدناه. يمكننا استخدام المنحنى لدراسة تأثير تقليل معدل الوصول على كل من طول الطابور وزمن الانتظار.





كما ترى فإن استخدام نظرية الطوابير يجعلنا نأخذ قرارات واعية لتقليل زمن الانتظار وطول الطوابير. دعنا نختتم هذه الحالة بمثال آخر.

مثال: افترض أن جزارا يعمل وحده، ويأتي لهذا الجزار ٨٠ عميلا خلال ساعات العمل العشر، وقد تابع الزمن الذي يحتاجه هو لخدمة كل عميل فوجده في المتوسط ٦ دقائق. وقد لاحظ وجود انتظار من آن لآخر، وهو يريد أن يعرف تأثير توظيف مساعد له بحيث يصل زمن الخدمة لخمس دقائق فقط.

ص = ٨٠ ÷ ١٠ = ٨ عميل/ساعة

خ= ٦/١ عميل/دقيقة = ٦/٦٠ = ١٠ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ١- (٨÷١٠)= ٠,٢ =٢٠%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٨÷(١٠-٨) = ٨÷٢ = ٤ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور= ٨*٨ ÷ (١٠ *(١٠-٨))= ٦٤ ÷ ٢٠ = ٣,٢ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ١ ÷ (١٠ - ٨)= ٢/١= ٠,٥ ساعة = ٣٠ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٨ ÷(١٠ *(١٠-٨))= ٢٠/٨ = ٠,٤ ساعة = ٢٤ دقيقة

احتمالية انشغال مقدم الخدمة = ٨ ÷ ١٠ = ٠,٨ =٨٠%

لاحظ انه في ٢٠% من الوقت فقط لا يوجد أي عميل ينتظر، وأن متوسط طول الطابور هو ٣,٢ عميل، وان زمن الانتظار هو ٢٤ دقيقة.

في حالة زمن خدمة ٥ دقائق فإن معدل الخدمة سيساوي ١٢ عميل في الساعة، وباستخدام المعادلات نجد ان:

عدد العملاء المتوسط في الطابور= ٨*٨ ÷ (١٢ *(١٢-٨))= ٦٤ ÷ ٤٨ = ١,٣٣ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ١ ÷ (١٢ - ٨)= ٤/١= ٠,٢٥ ساعة = ١٥ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٨ ÷(١٢ *(١٢-٨))= ٨/٤٨ = ١/٦ ساعة = ١٠ دقائق

احتمالية عدم وجود أي عميل = ١- (٨÷١٢)=٠,٣٣= ٣٣%

تبدو الأمور أفضل كثيرا من الوضع السابق حيث قل طول الطابور وزمن الانتظار لأقل من النصف، وصار أكثر من ٣٠ % من وقت العمل بدون انتظار.

في المقالات التالية بمشيئة الله تعالى نتعرف على حالات أخرى من حالات نظرية الطوابير. وإلى ذلك الحين حاول أن تستخدم نظرية الطوابير في أي حال تمر بها في العمل.

نظرية الطوابير -٣ Queueing Theory

استعرضنا في المقالة السابقة الحالة الأولى من حالات نظرية الطوابير Queueing Theory، ونستمر في هذه المقالة في استعراض حالات أخرى.

رموز خصائص الطابور:

وقبل أن نسترسل في رحلتنا فإنه تجدر الإشارة لبعض الرموز التي تستخدم للتعبير عن الحالات المختلفة للطوابير في صورة أ\ب\ت أو A/B/C حيث:

أ: نوع توزيع معدل الوصول (M: بوسون، D: ثابت، E:توزيع إرلانج Erlang، وأخيرا G: توزيع عام)

ب: نوع توزيع زمن الخدمة (نفس مصطلحات أ حيث M: توزيع أسي والباقي كما هو)

ت: عدد قنوات الخدمة (١ أو ٢ او ٣ ....)

فعندما نقول M/M/1 فهذا يعني أن الوصول يتبع توزيع بوسون وان الخدمة تتبع التوزيع الأسي وأن عدد قنوات الخدمة هي ١، وإذا قلنا M/D/3 فهذا يعني أن الوصول يتبع توزيع بوسون وان زمن الخدمة ثابت وأن عدد قنوات الخدمة هو ٣.

هذه هي الصورة الشائعة والتي توضح الخصائص الأساسية للطابور ولكن الصورة الكاملة لتوضيح خصائص الطابور كلها هي أ\ب\ت\ث\ج\ح حيث:

ث: نظام الطابور (الخدمة بأسبقية الوصول، الخدمة عكس أسبقية الحضور، عشوائي ...)

ج: الحد الأقصى لعدد العملاء في المنظومة (قد يكون عددا محددا مثل ٥ أو ١٢ ... أو قد يكون بلا حدود فالطابور يمتد في الطريق إلى أي عدد)

ح: حجم مصدر طالبي الخدمة (قد يكون محدودا وقد يكون غير محدود أي لا نهائي رياضيا)

الأشكال التالية تلخص هذه الرموز:

أ\ب\ت\ث\ج\ح أو A/B/C/D/E/F		
عملية الوصول \ عملية الخدمة \ عدد قنوات الخدمة \ نظام الطابور \ الحد الأقصى للعملاء في منظومة الخدمة \ حجم مصدر طالبي الخدمة		
توزيع معدل الوصول	أ	A
توزيع زمن الخدمة	ب	B
عدد قنوات الخدمةالمتوازية	ت	C
نظام الطابور	ث	D
الحد الأقصى للعملاء في منظومة الخدمة	ج	E
حجم مصدر طالبي الخدمة	ح	F

رموز عملية الوصول:

توزيع معدل الوصول أ		
توزيع بوسون Poisson Distribution	م	M
ثابت Deterministic	ث	D
توزيع إرلانج Erlang Distribution	إر	Er
توزيع عام	ع	G

رموز زمن الخدمة:

توزيع معدل الوصول ب		
توزيع أسي Exponenetial Distibution	م	M
ثابت Deterministic	ث	D
توزيع إرلانج Erlang Distribution	إر	Er
توزيع عام	ع	G

رموز نظام الطابور:

نظام الطابور ث		
الخدمة بأسبقية الوصول First Come First Served	غ أس	FCFS
الخدمة عكس أسبقية الوصول Last Come First served	غ ع أس	LCFS
نظام عام General Disicpline	ن ع	GD
عشوائي Service in Random Order	غ ش	SIRO

وبهذا يمكن ان نرمز للحالة الأولى بـ م\م\١\ن ع\لا نهائي\ لانهائي أو M/M/1/GD / inf / inf

وتجدر الإشارة إلى أن هذه الرموز تنسب لـ كيندل Kendall والذي اقترحها في عام ١٩٥٣. أما الرموز العربية فهي اقتراح من كاتب هذه المقالة لرموز عربية مناظرة للرموز الإنجليزية.

٢ـ قناة واحدة ـ مرحلة واحدة ـ زمن خدمة ثابت:

هذه الحالة هي نفسها الحالة الأولى إلا أن زمن الخدمة لا يتبع التوزيع الأسي بل هو ثابت.لذلك نرمز لها بـ م\ث\١\ن ع\لا نهائي\ لانهائي أو M/D/١/inf / inf / GD

في هذه الحالة تتغير المعادلات كما يلي:

$$ح_0 = 1 - \frac{ص}{خ}$$

$$ط_ك = \frac{ص^2}{2*خ*(خ - ص)} + \frac{ص}{خ}$$

$$ط_ط = \frac{ص^2}{2*خ*(خ - ص)}$$

$$و_ك = \frac{ص}{2*خ*(خ - ص)} + \frac{1}{خ}$$

$$و_ط = \frac{ص}{2*خ*(خ - ص)}$$

$$غ = \frac{ص}{خ}$$

هناك فارق جوهري بين هذه المعادلات ومعادلات الحالة الأولى، فمتوسط زمن الانتظار ومتوسط عدد العملاء في الطابور يساوي نصف نظيره في الحالة الأولى، أي أننا لو استطعنا تثبيت زمن الخدمة لتمكنًّا من تخفيض وقت الانتظار وطول الطابور إلى النصف. هذه نتيجة مدهشة تدعونا للتفكير في تأثير التغير في أزمنة الأعمال على مستوى الأداء. وكما تذكر فإن الانتظار ينشأ بسبب تغير معدل الحضور ومعدل الخدمة، فعندما يكون معدل

الخدمة أعلى من معدل الوصول وكلاهما ثابت فإنه لن يكون هناك انتظار، ولكن مجرد تغير الحضور في ساعة عن أخرى ومجرد تغير زمن خدمة عميل عن آخر يتسبب في حدوث الانتظار، ولو أصبح زمن الخدمة ثابتا لتخلصنا من نصف الانتظار، ولو صار معدل الحضور ثابتا لتخلصنا من النصف الآخر.

مثال: دعنا نعود لنفس مثالنا السابق حيث معدل الوصول ٩ عملاء في الساعة وزمن الخدمة ٥ دقائق ولكن زمن الخدمة هنا ثابت.

ص = ٩ عميل/ساعة

خ= ٥/١ عميل/دقيقة = ٦٠/٥ = ١٢ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ١- (٩÷١٢)= ٠,٢٥ =٢٥%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٩*٩ ÷(٢ * ١٢ *(١٢-٩))+(٩÷ ١٢) = ٨١ ÷ ٧٢ + ٠,٧٥= ١,٨٧٥ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور=٩*٩ ÷(٢ * ١٢ *(١٢-٩))=٨١ ÷ ٧٢ = ١,١٢٥ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ٩ ÷(٢ * ١٢ *(١٢-٩))+(١÷ ١٢)= ٩ ÷ ٧٢ + ١÷ ١٢= ٠,٢٠٨ ساعة = ١٢,٥ دقيقة

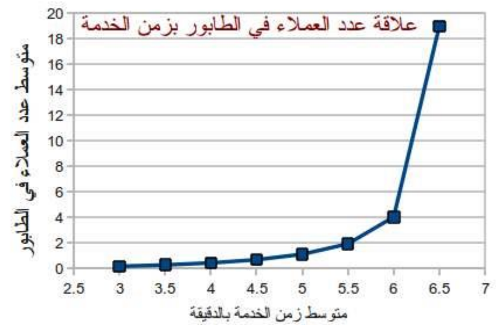
متوسط وقت الانتظار = ٩ ÷(٢ * ١٢ *(١٢-٩))= ٩ ÷ ٧٢ = ٠,١٢٥ ساعة = ٧,٥ دقيقة

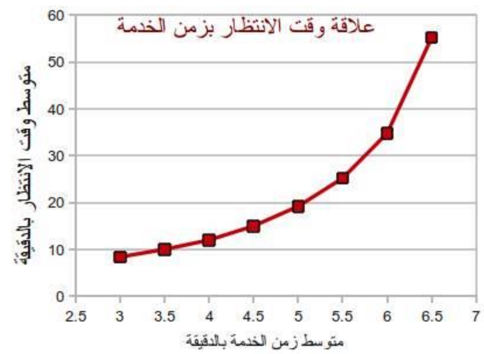
احتمالية انشغال مقدم الخدمة = ٩ ÷ ١٢ = ٠,٧٥= ٧٥%

لاحظ أن متوسط زمن الانتظار قد انخفض من ١٥ دقيقة إلى ٧,٥ دقيقة، وان متوسط عدد العملاء في الطابور قد انخفض من ٢,٢٥ إلى ١,١٢٥ عميلا.

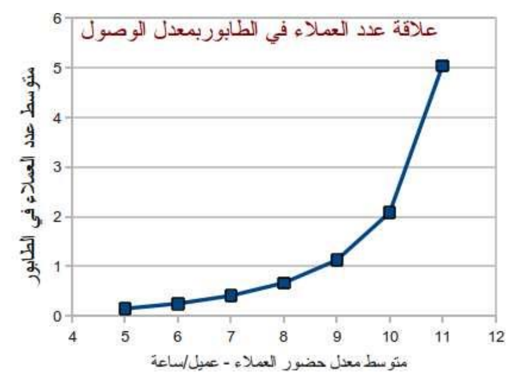
وبعيدا عن الحسابات فإننا نفهم من هذا المثال أننا لو أردنا تقليل وقت الانتظار وطول الطوابير فعلينا أن نبدأ بدراسة كيفية تقصير زمن الخدمة او تقليل التغير فيه، وهذا ياتي من دراسة لخطوات عمليات الخدمة ومحاولة تبسيطها او تسريعها، وقد يكون بتدريب العاملين تدريبا جيدا على الخطوات القياسية للعمل بحيث لا يتغير زمن الخدمة حسب الموظف القائم بها.

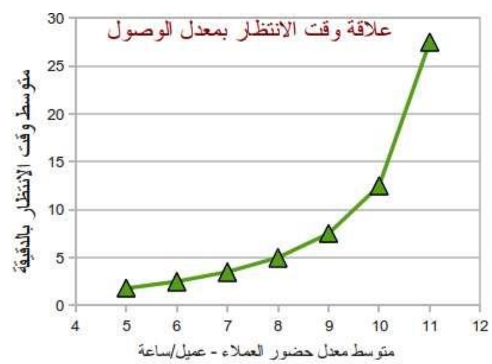
ويمكننا رسم علاقة زمن الانتظار وطول الطابور بزمن زمن الخدمة باستخدام المعادلات لنحصل على الأشكال التالية:





وكذلك مع معدل الوصول:





وأترك للقارئ الكريم ملاحظة تأثير تغير معدل الوصول وزمن الخدمة على طول الطابور ووقت الانتظار.

وفي المقالات التالية بمشيئة الله نتعرف على حالات أخرى من نظرية الطوابير.

نظرية الطوابير ٤- Queueing Theory

نستكمل رحلتنا مع نظرية الطوابير فنتعرف على المزيد من الحالات المختلفة في خصائصها.

٣- قناة واحدة - مرحلة واحدة - طابور محدود العدد:

هذه حالة مختلفة عن الحالة الأولى والثانية وذلك لأننا نفترض هنا أن الطابور له طول محدود أي أن طول الطابور عندما يصل لعدد معين فلا يسمح لأحد بالانضمام للطابور، والسبب في ذلك قد يكون ضيق مساحة الانتظار أو تحديدها بعدد معين. وبهذا يمكن ان نرمز لهذه الحالة بـ م\م\١\ن ع\م\ لانهائي أو M/M/1/GD/ C / inf حيث م أو C هي قيمة الحد الأقصى لعدد العملاء في منظومة الخدمة.

في هذه الحالة تتغير الحسابات بعض الشيء نظرا لأن احتمالية أن يزيد عدد العملاء في المنظومة عن م هو صفر، وتصبح المعادلات كالتالي:

$$\text{ح}_0 = \frac{1-(\text{ص}\backslash\text{خ})}{1-(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{م}+1}}$$

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ح}_0 * (\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ن}} \qquad \text{ن} \leq \text{م}$$

$$\text{ح}_{\text{م}} = \text{ح}_0 * (\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{م}}$$

$$\text{ط}_{\text{ك}} = \frac{(\text{ص}\backslash\text{خ})}{1-(\text{ص}\backslash\text{خ})} - \frac{(\text{م}+1)*(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{م}+1}}{1-(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{م}+1}}$$

$$\text{ط}_{\text{ط}} = \text{ط}_{\text{ك}} - \frac{\text{ص} * (1-\text{ح}_{\text{م}})}{\text{خ}}$$

$$\text{و}_{\text{ك}} = \frac{\text{ط}_{\text{ك}}}{\text{ص} * (1-\text{ح}_{\text{م}})}$$

$$\text{و}_{\text{ط}} = \text{و}_{\text{ك}} - (1\backslash\text{خ})$$

مثال:نعود لنفس مثالنا في المقالات التالية وهو: افترض أن مركزا يقدم خدمة توثيق الشهادات العلمية، ويستغرق توثيق الشهادة في المتوسط خمس دقائق (تخضع للتوزيع الأسي)، ويصل لهذا المركز في المتوسط ٩ عملاء في الساعة (تخضع لتوزيع بوسون).ولكننا سنضيف أن أقصى عدد للعملاء في منظومة الخدمة هو ٧.

ما هو متوسط عدد العملاء داخل مركز الخدمة، وما هو وقت الانتظار؟

ص = ٩ عميل/ساعة

خ= ١/٥ عميل/دقيقة = ٦٠/٥ = ١٢ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ٢٨%

احتمالية ألا يجد العميل مكانا في الطابور أي احتمالية وجدو ٧ عملاء في منظومة الخدمة= ٣,٧%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٢,١ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور=١,٤ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ٠,٢٤ ساعة = ١٤,٦ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٠,١٦ ساعة = ٩,٦ دقيقة

وتختلف النتائج حسب أقصى عدد للعملاء في المنظومة، فلو كان يمكننا أن نستوعب حتى ١٢ عميلا فإن النتائج تصبح:

احتمالية عدم وجود أي عميل = ٢٥,٦%

احتمالية ألا يجد العميل مكانا في الطابور أي احتمالية وجود ١٢ عميلا في منظومة الخدمة= ٠,٨%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٢,٧ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور= ١,٩ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ١٨ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ١٣ دقيقة

وكلما زاد الحد الأقصى لعدد لاعملاء في منظومة الخدمة كلما اقتربنا من نفس نتائج الحالة الأولى التي لا يكون فيها حد أقصى لطول الطابور.

٤- قناة واحدة - مرحلة واحدة - مصدر طالبي الخدمة محدود العدد:

في هذه الحالة فإن العدد الكلي لكل من قد يفكر في طلب الخدمة محدودا، مثال ذلك: مطعم المؤسسة يخدم العاملين بالمؤسسة وبالتالي فإن مصدر طالبي الخدمة محدودا، فلو كان عددهم ١٠٠ فإن ٩٠ قد يحضرون للمطعم أو ٨٠ أو ١٠٠ ولكن المؤكد أن العدد لن يتجاوز المائة، وكذلك كل مؤسسة أو كل شخص يؤدي خدمة لعدد محدود من الناس كالمدرس الذي يخصص ساعة لاستفسارات التلاميذ في الفصل، أو كمركز الصيانة الذي يخدم مشتركين في الخدمة، أو الممرضة التي تخدم عددا من المرضى.

ويمكن ان نرمز لهذه الحالة بـ م\م\١\ن ع\ن\ ن أو M/M/1/GD /N /N حيث ن أو N هي قيمة العدد الكلي للعملاء الذين قد يطلبون هذه الخدمة. لاحظ ان الحد الأقصى للعملاء في المنظومة هو ن أيضا لأن عدد العملاء في المنظومة لا يمكن أن يزيد عن العدد الكلي للعملاء الذين قد يطلبون الخدمة (مصدر طالبي الخدمة).

معدل الوصول في هذه الحالة هو معدل الوصول لكل طالب خدمة أي معدل عطل الماكينة أو معدل طلب المشترك الخدمة، فهو ليس معدل وصول أي مشترك فمثلا لو كان مركز صيانة في شركة مسئول عن إصلاح ١٠٠ ماكينة وكانت الماكينة تعمل في المتوسط ١٠٠٠ ساعة قبل الحاجة لإصلاح فإن معدل الوصول سيساوي ١٠٠٠/١ = ٠,٠٠١ ساعة.

في هذه الحالة تصبح المعدلات كالتالي:

$$\text{ح}_0 = \frac{1}{\sum_{\text{س}=0}^{\text{ن}} \frac{\text{ن}! \times \text{ص}^{\text{س}}}{(\text{ن}-\text{س})! \times \text{خ}^{\text{س}}}}$$

س= 1، 2، 3...ن

ن = عدد مصدر طالبي الخدمة

$$\text{ح}_{\text{س}} = \frac{\text{ح}_0 \times \text{ن}! \times \text{ص}^{\text{س}}}{(\text{ن}-\text{س})! \times \text{خ}^{\text{س}}}$$

$$\text{ط}_{\text{ك}} = \frac{\text{ن} - \text{خ} \times (1-\text{ح}_0)}{\text{ص}}$$

$$\text{ط}_{\text{ط}} = \frac{\text{ن} - (\text{ص}+\text{خ}) \times (1-\text{ح}_0)}{\text{ص}}$$

$$\text{و}_{\text{ك}} = \frac{\text{ط}_{\text{ك}}}{\text{ص} \times (\text{ن} - \text{ط}_{\text{ك}})}$$

$$\text{و}_{\text{ط}} = \frac{\text{ط}_{\text{ط}}}{\text{ص} \times (\text{ن} - \text{ط}_{\text{ك}})}$$

تلاحظ في المعادلة الأولى استخدام ن! وهذا تعبير رياضي -قد يكون قد مر عليك من قبل - وهو يعني مضروب ن أي حاصل ضرب ن في كل الأعداد الأقل منها حتى الواحد الصحيح، فمضروب ٦= ٦ * ٥ * ٤ * ٣ * ٢ *١= ٧٢٠، ومضروب ٥ = ٥ * ٤ * ٣ * ٢ *١= ١٢٠ وهكذا. والمقام في المعادلة الأولى هو مجموع ناتج التعويض بـ س =١ إلى قيمة ن وهي حجم (عدد) مصدر طالبي الخدمة.

مثال: افترض أن مؤسسة لديها ١٠٠ موظف ولديها مركزا للاستعلام التليفوني بخط واحد، وفي المتوسط فإن كل موظف يتصل مرة واحدة في اليوم، وتستغرق الإجابة عليه في المتوسط خمس دقائق. ما هو وقت الانتظار والخدمة.....

ص= ١\٢٤= ٠,٠٤١٦ في الساعة

خ= ١ \٥ = ٠,٢ عميل في الدقيقة = ١٢ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ٦٥,٤٦%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٠,٥٢ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور (المنتظرين على التليفون) = ٠,١٧٨ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ٧,٥٧ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٢,٥٧ دقيقة

ماذا لو كان زمن الخدمة المتوسط هو ٧ دقائق؟

خ= ١/ ٧ = ٨,٥٧ عميل في الساعة

احتمالية عدم وجود أي عميل = ٥١,٨٤%

عدد العملاء المتوسط داخل منظومة الخدمة = ٠,٩١ عميل

عدد العملاء المتوسط في الطابور (المنتظرين على التليفون) = ٠,٤٣ عميل

متوسط الوقت الكلي الذي يقضيه العميل في المنظومة = ١٣,٢٥ دقيقة

متوسط وقت الانتظار = ٦,٢٥ دقيقة

بهذا نكون قد تعرفنا على كيفية حساب أوقات الانتظار وطول الطابور لأربع حالات مختلفة تشترك جميعها في أن قناة الخدمة هي قناة واحدة. في المقالات التالية إن شاء الله نتعرف على التعامل مع نفس الحالات ولكن في حالة وجود أكثر من قناة للخدمة.

ولكي تتم الفائدة من هذه المقالات، حاول تطبيقها على أي طابور أو أي عملية انتظار تقابلها لكي تتفهم طبيعة المعادلات وتقارن بين الحالات المختلفة. ربما كان شكل المعادلات لأول وهلة معقدا ولكن بالتطبيق تظهر بساطتها.

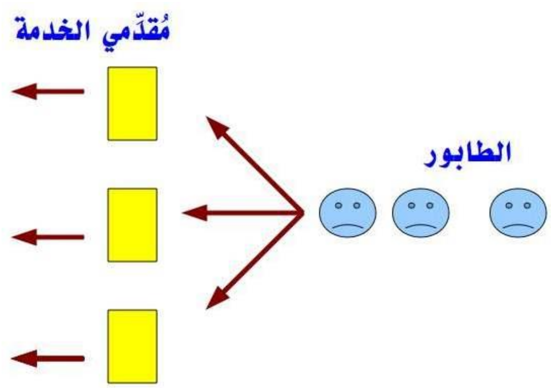
نظرية الطوابير -٥ Queueing Theory

استعرضنا في مقالات سابقة حالات أربع لنظرية الطوابير وكلها تتفق في وجود قناة واحدة للخدمة، وفي هذه المقالة نبدأ في التعرف على كيفية التعامل مع حالة وجود أكثر من قناة للخدمة.

٥- عدة قنوات - مرحلة واحدة - طابور غير محدود:

في كثير من الأحيان يكون هناك طابور واحد في انتظار أكثر من مقدم للخدمة، كما يحدث في البنوك حيث تحصل على رقم ما عند دخولك ثم تنتظر فراغ أي من الصرَّافين، أو كما يحدث في المطار حيث يكون هناك طابور واحد في انتظار فراغ أي من الموازين، أو كما يحدث عند الحلاق حيث تنتظر فراغ أي من الحلاقين.

وبهذا يمكن ان نرمز لهذه الحالة بـ م\م\ق\ان ع\لا نهائي\ لانهائي أو M/M/S/inf / inf/ GD حيث ق أو S هو عدد قنوات الخدمة، وباقي الرموز قد تعرفنا عليها من قبل في نظرية الطوابير -٣.



افترض أنك تدير مركزا للخدمة أو مركزا تجاريا ولديك أكثر من قناة للخدمة وتود أن تعرف تأثير زيادتها أو تقليلها، أو أن لديك مقدم خدمة واحد فقط وتريد أن تعرف تأثير زيادته لاثنين أو ثلاثة. هذه الأسئلة تستطيع أن تجد إجابتها في نظرية الطوابير.

في هذه الحالة تختلف المعادلات نظرا لوجود أكثر من قناة للخدمة، ويرمز لعدد قنوات الخدمة بـ ق كما ذكرنا، وتصبح المعادلات كما يلي:

$$\text{ح}_0 = \frac{1}{\left[\text{مجموع}_{\text{س}=0}^{\text{س}=\text{ق}-1} \frac{(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{س}}}{\text{س}!}\right] + \frac{(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ق}}}{\text{ق}!} * \frac{(\text{ق}*\text{خ})}{(\text{ق}*\text{خ} - \text{ص})}}$$

س= 1، 2، 3...ق-1

ق = عدد قنوات الخدمة

$$\text{ح}_{\text{ت}} = \frac{\text{ح}_0}{\text{ق}!} * \frac{(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ق}} * \text{ق}*\text{خ}}{(\text{ق}*\text{خ} - \text{ص})}$$

$$\text{ح}_{\text{ن}} = (\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ن}} * (1\backslash\text{ن}!) * \text{ح}_0$$

إذا كانت ن أقل من ق

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{(\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ن}} * \text{ح}_0}{\text{ق}! * \text{ق}^{\text{ن}-\text{ق}}}$$

إذا كانت ن أكبر من ق

$$\text{ط}_{\text{ك}} = \frac{\text{ص} * \text{خ} * (\text{ص}\backslash\text{خ})^{\text{ق}} * \text{ح}_0}{(\text{ق}-1)! * (\text{ق} * \text{خ} - \text{ص})^2} + (\text{ص}\backslash\text{خ})$$

$$\text{ط}_{\text{ط}} = \text{ط}_{\text{ك}} - (\text{ص}\backslash\text{خ})$$

$$\text{و}_{\text{ك}} = \frac{\text{ط}_{\text{ك}}}{\text{ص}}$$

$$\text{و}_{\text{ط}} = \text{و}_{\text{ك}} - (1\backslash\text{خ})$$

$$\text{غ} = \frac{\text{ص}}{\text{ق} * \text{خ}}$$

أضفنا رمزا جديدا وهو ح ت حيث يعني احتمالية أن يحضر عميل ويجد كل قنوات الخدمة مشغولة فينتظر (أي احتمالية الانتظار). وأما غ فهي نسبة انشغال كل من مقدمي الخدمة.

لعل القارئ يقول في نفسه: لقد بدأت المعادلات تبدو طويلة ومعقدة. في الحقيقة فإن المعادلات تبدو طويلة ولكنك إذا حاولت وضعها في صفحة على أي برنامج للحسابات مثل إكسل أو كالك فإن الأمور تبدو بسيطة، كما وأنك قد تستخدم بعض المواقع التي تقدم خدمة حسابات نظرية الطوابير مجانا (مثل: حاسوب نظرية الطوابير) أو تستخدم برنامجا متخصصا، ولكن المهم هو أن تعرف الحالة التي تنطبق على مشكلتك وتعرف كيف تحسب معدل الوصول والخدمة وعدد القنوات.

مثال: نعود لمثالنا الأول حيث معدل الوصول هو ٩ عملاء في الساعة ومعدل الخدمة هو ١٢ عميلا في الساعة، ونقارن بين حالة وجود مقدم خدمة واحد وحالة وجود مقدمين للخدمة؟

ص = ٩ عميل/ساعة

خ= ٥/١ عميل/دقيقة = ٦٠/٥ = ١٢ عميل في الساعة

باستخدام المعادلات المبينة أعلاه وبالمقارنة بنتائج وجود قناة واحدة للخدمة والتي حسبناها في مقالة: نظرية الطوابير -٢، نصل للجدول التالي:

	عدد قنوات الخدمة	
	1	2
احتمالية عدم وجود أي عميل	25.0%	45.5%
العدد الكلي للعملاء في المنظومة (انتظار + خدمة)	3.00	0.873
عدد العملاء المنتظرين في الطابور	2.25	0.123
زمن الخدمة الكلي (دقيقة)	20.0	5.818
زمن الانتظار (دقيقة)	15.0	0.818
احتمالية انشغال مقدم الخدمة	75.0%	37.5%

لقد توصلنا إلى نتائج مهمة جدا لكي نستطيع ان نتخذ قرار زيادة عدد مقدمي الخدمة، فالجدول يبين الفارق بين وجود مقدم خدمة واحد ووجود اثنين، والفارق بينهما في هذا المثال كبير، فعدد العملاء المنتظرين في الطابور في الحالة الأولى ٢,٢٥ وفي الحالة لثانية يكاد يكون صفرا، وزمن الانتظار في الحالة الأولى ١٥ دقيقة وفي الحالة الثانية أقل من دقيقة. وأما نسبة انشعال مقدم الخدمة فهي منخفضة في الحالة الثانية حيث تساوي ٣٧,٥% وهذا يعني أن كلا من مقدمي الخدمة لن يكون مشغولا إلا حوالي ثلث وقت العمل، وهذا أمر يجب أن ننظر إليه من جهتين: الأولى: أن قرار زيادة موظف أو آلة لتقليل وقت الانتظار وزمن الخدمة الكلي يجب ألا يكون مبينيا على أساس أن يكون مقدم الخدمة مشغولا معظم الوقت بل يجب أن يعتمد على مقارنة أوقات الانتظار بما نقبله كمؤسسة، فليس الهدف هو شغل وقت الموظف ولكن الهدف هو تقديم خدمة أفضل يسعد بها العميل، الثانية أننا قد نفكر في قيام مقدم الخدمة بأعمال أخرى في أوقات الفراغ بحيث لا يترك مكان الخدمة، فقد نوكل له القيام ببعض المراجعات أو تسجيل البيانات في الأوقات التي لا يكون منشغلا مع بعض العملاء، وقد نتبع سياسة وسط بأن يكون لدينا مقدم خدمة واحدا ثابتا، والآخر يقوم بأعمال أخرى مثل ترتيب المكان ووضع المنتجات في أماكنها حتى يبدأ طول الطابور في الزيادة فيترك هذه الأعمال ويقوم بدور مقدم خدمة ثان.

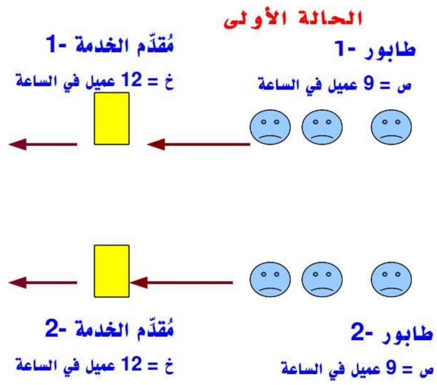
مثال: افترض أن لدينا موظفان يقدمان نفس الخدمة أو خدمتين متشابهتين تقريبا وكان معدل الوصول لكل خدمة هو ٩ عملاء في الساعة واكن معدل الخدمة لكل موظف هو ١٢ عميلا في الساعة. إدارة المؤسسة تريد أن تقارن بين ثلاث حالات:

١- أن يكون هناك طابور منفصل لكل خدمة

٢- أن يكون الطابور مشتركا ولكن كل موظف يؤدي خدمة على انفراد

٣- أن يكون هناك طابور مشترك يؤدي لقناة خدمة واحدة تتكون من الموظفين الذين يعملان سويا لتقديم الخدمة في نصف الوقت.

في الحالة الأولى:

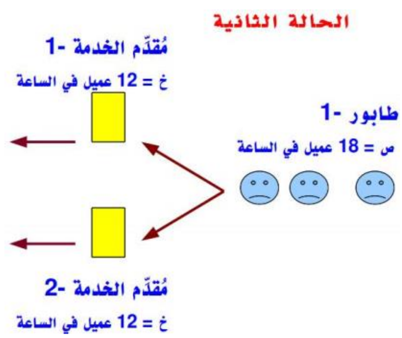


كل طابور ومقدم خدمة سيتم تقييمه على حدة حيث:

ص= ٩ عميل في الساعة

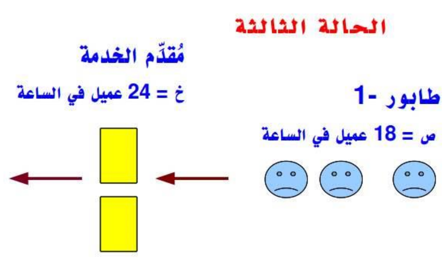
خ= ١٢ عميل في الساعة

في الحالة الثانية:



سيكون هناك طابور واحد بمعدل وصول ص = ٩ + ٩ =١٨ عميلا في الساعة وبمعدل خدمة خ = ١٢ عميلا في الساعة وبقناتين للخدمة

في الحالة الثالثة:



سيكون هناك طابور مشترك بمعدل وصول ص = ١٨ عميلا في الساعة وبمعدل خدمة خ = ٢٤ عميلا في الساعة وبقناة خدمة واحدة

الحالة الاولى والثالثة سيتم حسابها باستخدام معدلات قناة الخدمة الواحدة بينما الحالة الثانية سيتم حسابها باستخدام المعدلات المبينة أعلاه لقنوات خدمة متعددة.

	عدد قنوات الخدمة		
	الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
احتمالية عدم وجود أي عميل	25.0%	14.3%	25.0%
العدد الكلي للعملاء في المنظومة (انتظار + خدمة)	3.0	3.4	3.0
عدد العملاء المنتظرين في الطابور	2.25	1.93	2.25
زمن الخدمة الكلي (دقيقة)	20.0	11.4	10.0
زمن الانتظار (دقيقة)	15.0	6.4	7.5
احتمالية انشغال مقدم الخدمة	75.0%	75.0%	75.0%

من هذه النتائج نتوصل إلى:

١- الحالة الأولى (طوابير منفصلة) هي أسوأ حالة من كل الوجوه، ولعل هذا هو سبب عدم استخدام طوابير منفصلة في كثير من الأماكن التي تراعي زمن الانتظار والخدمة

٢- الحالة الثانية أفضل من حيث عدد العملاء في الطابور

٣- الحالة الثالثة أفضل من وجوه كثيرة فهي تؤدي لأقصر زمن كلي للخدمة وأقل عدد من العملاء في مقر الخدمة، ولكن لا يمكن تطبيق هذا الأسلوب في كل الخدمات، فقد يكون زمن الخدمة واحدا سواء قام به موظف واحد أو اثنين أو ثلاثة، فالأمر يتوقف على طبيعة الخدمة، ولذلك فإن الحالة الثانية أكثر شيوعا.

يجدر الإشارة إلى أن الفارق بين الحالات الثلاث سيكون دائما مثلما وجدناه في هذا المثال بغض النظر عن معدل الخدمة معدل الوصول.

كما ترى فإن قرارات مصيرية نستطيع أن ندرسها باستخدام نظرية الطوابير، ولو نظرت حولك لوجدت طوابير كثيرة لا تراها، فطلبات مستخدمي الشبكة من الخادم server تتم من خلال طابور، والعمليات الصناعية التي تتطلب الرافعة (الونش) كل بضع دقائق تنتظر في طابور، والمعدات التي تتطلب رجل الإصلاح تتم في طابور، فالطوابير ليست بالضرورة طوابير تراها بعينيك ولكنها تتواجد كعملية انتظار وإن لم تتواجد في نفس المكان أو تقف في صف.